

H2D2 : Les méthodes de résolution

Par
Yves SECRETAN

Institut national de la recherche scientifique, INRS-ETE
Québec (Québec), Canada
G1K 9A9

Rapport de projet

Avril 2013

Sommaire

La présente se veut une vue d'ensemble des différents algorithmes de résolution de systèmes matriciels non-linéaires implantés dans H2D2.

Méthodes de résolution

Dans sa forme actuelle, H2D2 est optimisé pour exploiter au mieux les méthodes de résolution matricielles directes, par opposition aux méthodes itératives comme GMRes. En s'appuyant sur des solveurs externes parallélisés et/ou distribués (MUMPS, pardiso, SuperLU), H2D2 utilise efficacement les ordinateurs, tant pour la partie assemblage des matrices que pour la résolution du système matriciel (Secretan *et al.*, 2009 et 2010).

Toutefois, la résolution des systèmes non-linéaires, en particulier ceux liés aux équations de St-Venant, reste un exercice non trivial. À faible viscosité, ainsi qu'en présence de bancs couvrant-découvrant, les systèmes deviennent rigides et oscillent. Diverses stratégies sont envisagées, et parfois déjà implantées, pour augmenter la robustesse du solveur et aider l'utilisateur à obtenir une solution numériquement valide.

Définitions

Soit le système matriciel (Dhatt *et al.*, 2005)

$$K \cdot u = f$$

résultat de la discrétisation par éléments finis des équations différentielles des éléments de H2D2 (Saint-Venant 2D, transport-diffusion, ...), avec

K	la matrice de rigidité
u	le vecteur des inconnues
f	le vecteur second membre

Dépendamment de l'élément, K est linéaire ou non-linéaire.

Le résidu R , qui est défini par :

$$R = f - K \cdot u$$

est une mesure de la distance par rapport à la solution. À solution, le résidu est nul.

Les méthodes de résolution de systèmes non-linéaires sont toutes itératives. À chaque pas, elles calculent du , l'incrément de solution défini par :

$$du = u^{i+1} - u^i$$

où i est l'indice de l'itération. On vise la convergence du système par approximations successives. Cette convergence peut être mesurée par une norme de l'incrément du ou par une norme du résidu R .

du , l'incrément de solution, peut également être vu comme une direction de descente, descente vers le résidu nul, *i.e.* vers la solution.

Dans H2D2, le système matriciel est généralement résolu par une méthode directe, donc avec étape de factorisation de la matrice suivie d'une étape de résolution.

Les normes

Une norme est une mesure d'une erreur, d'une grandeur, d'un écart, d'une distance entre des courbes ou des surfaces. Associée à des valeurs seuils, une norme permet de poser des diagnostics et de prendre des décisions.

Absolute vs relative

Dans le cas de l'incrément de solution du , la norme peut être absolue, auquel cas on considère directement du :

$$du < \varepsilon_a \quad \text{ou} \quad \frac{du}{\varepsilon_a} < 1$$

ou relative, auquel cas on considère plutôt du/u :

$$\frac{du}{|u|} < \varepsilon_r \quad \text{ou} \quad \frac{du}{\varepsilon_r |u|} < 1$$

avec les précautions d'usage contre les divisions par un petit nombre. Pour le résidu, comme la valeur de référence est 0, on utilise toujours une norme absolue.

Il est possible de les combiner, l'expression prenant alors la forme :

$$du < \varepsilon_a + \varepsilon_r |u| \quad \text{ou} \quad \frac{du}{\varepsilon_a + \varepsilon_r |u|} < 1$$

Dans H2D2, c'est souvent la comparaison avec 1 qui est utilisée.

La norme L2

La norme L2 est définie par :

$$\|u\|_{L2} = \sqrt{\int_{\Omega} u^2 d\Omega}$$

La norme l2 est sa version discrète, soit :

$$\|u\|_{l2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i u_i^2}$$

Cette norme, également appelée RMSE, présente l'avantage d'être plus lisse que la norme ∞ .

La norme max (∞)

La norme ∞ est définie par :

$$\|u\|_{\infty} = \max_i |u_i|$$

En plus de la valeur, il est possible de connaître l'indice i de la valeur max. Dans le cas d'une résolution par éléments finis, cet indice est lié à un nœud et donc, à une position dans le maillage.

Méthodes de résolution de base

Méthode de Picard

La méthode de Picard est une méthode de point fixe (Dhatt *et al.*, 2005). Elle est définie par

$$K(u^i) \cdot u^{i+1} = f(u^i)$$

qui peut également s'écrire sous la forme

$$K(u^i) du = R(u^i)$$

pour l'incrément de solution (direction de descente) du .

Plutôt que d'être recalculée à chaque itération, la matrice K peut être maintenue constante sur un certain nombre de sous-itérations. La convergence s'en trouve ralentie.

Statut : implanté dans H2D2

Méthode de Newton

La méthode de Newton (Dhatt *et al.*, 2005) se dérive en prenant l'expansion en série de Taylor, tronquée à l'ordre 1 autour du point u^i de la fonction que l'on veut annuler, ici le résidu :

$$u^{i+1} = u^i + d/du R(u^i) Du = u^i + Kt.Du$$

La méthode de Newton a un taux de convergence de 2 « à proximité de la solution », ce qui en fait une méthode très efficace. Plus loin de la solution, elle montre plus de « caractère », pouvant diverger. Diverses méthodes ont donc été développées :

- pour la maintenir « à proximité de la solution » en calculant des solutions intermédiaires (méthodes de pas de chargement, homotopie). Le défi est donc de contrôler le pas de chargement pour l'amener à la solution finale;
- pour la combiner avec une autre méthode de résolution comme Picard;
- pour la « tenir en laisse » en contrôlant l'incrément de solution (globalisation, backtracking, limiteurs).

Le contrôleur de convergence permet de poser un diagnostic sur la convergence et d'éviter des calculs possiblement inutiles en cas de faible convergence ou de divergence.

Plutôt que d'être recalculée à chaque itération, la matrice Kt peut être maintenue constante sur un certain nombre de sous-itérations. Alors, la convergence n'est plus quadratique.

Statut : implanté dans H2D2

Sous-itérations

La factorisation de la matrice est l'opération la plus coûteuse en temps de calcul. Il est parfois possible réutiliser la même factorisation pour plusieurs itérations, ce qui revient à bloquer la matrice pour un certain nombre de sous-itérations. Cette stratégie ne devient rentable qu'à proximité de la solution, lorsque la matrice n'évolue que peu. L'ordre de convergence est réduit.

L'utilisation d'un contrôleur de convergence pour les sous-itérations stoppe la boucle en cas de faible convergence ou de divergence.

Contrôleur de convergence

Le rôle du contrôleur de convergence est de faire le suivi de la convergence. En détectant les divergences ou les convergences faibles, il permet de poser des diagnostics et d'éviter des calculs inutiles. La norme utilisée est une norme L2 relative sur tous les degrés de libertés.

Statut : implanté dans H2D2

Modification de l'incrément de solution

Les méthodes présentées dans cette section visent toutes à améliorer la convergence en contrôlant ou en modifiant l'incrément de solution. Certaines ont une base mathématique, d'autres sont issues de l'expérience numérique et sont plus pragmatiques.

Backtracking

Le backtracking (Moré et Thuente, 1994) remplace la mise à jour de la solution de

$$u^{i+1} = u^i + du$$

par :

$$u^{i+1} = u^i + a \cdot du \quad \text{avec } 0 < a \leq 1$$

Le backtracking conserve la direction de descente en jouant sur la longueur du pas. Le facteur a est calculé de diverses façons, de manière à minimiser le résidu le long de du , considéré comme une direction de descente :

- par optimisation : backtracking exact, approximation du résidu $R(a)$ par une quadratique (backtracking 2^{ème} ordre) ou une cubique (backtracking 3^{ème} ordre)
- par relaxation constante
- selon des heuristiques : relaxation adaptative, relaxation de Rose & Bank

De plus, des règles sont souvent définies pour empêcher de trop grosses modifications de a d'une itération à l'autre.

Les algorithmes de backtracking sont efficaces lorsque les minima locaux mènent au minimum global, ce qui correspond à une configuration géométrique comme dans une vallée ou un half-pipe. Si, par contre, le minimum local correspond à une cuvette, alors le backtracking va piéger la solution au niveau du minimum local. Il est malheureusement impossible de savoir à priori dans quelle situation on se trouve.

Backtracking exact

Le résidu est calculé pour n valeur de a , distribuée régulièrement sur l'intervalle $[0,1]$. On retient le a qui produit le résidu minimum. Cette méthode est numériquement très inefficace. Elle n'est implantée que dans un but de contrôle des autres méthodes.

Statut : implanté dans H2D2

Backtracking 2^{ème} et 3^{ème} ordre

De manière itérative, on minimise le résidu le long d'une quadratique qui est passée entre les deux points :

- 1) $R, dR/da \quad a = 0$
- 2) $R(a)$

a a pour valeur initiale 1.

Le backtracking de 3^{ème} ordre est obtenu par une première itération de 2^{ème} ordre, puis en utilisant les données au point $a = 0$ ainsi que les 2 dernières valeurs calculées.

Statut : implanté dans H2D2

Relaxation constante

Le facteur a est maintenu constant tout au long de la résolution. Une valeur souvent utilisée en cas d'oscillation est :

$$a = 0.5$$

Statut : implanté dans H2D2

Relaxation adaptive

La relaxation adaptative est basée sur les travaux de Stefen et Hill (2001) et elle est issue de l'expérience numérique. La description ci-dessous reprend une partie du rapport.

La valeur du coefficient de relaxation a est ajustée à chaque itération en se basant sur la réduction relative de la norme L2 du résidu, rapportée au facteur de relaxation courant. La réduction relative (r_{red}) est donnée par:

$$r_{red} = \frac{\frac{r2 - r1}{r2}}{a}$$

avec :

- $r1$ norme L2 du résidu courant
- $r2$ norme L2 du résidu de l'itération précédente

Si $r_{red} > 0.5$ la solution est considérée progresser correctement, et on pose :

$$a = r_{red}$$

Si $r_{red} < 0.5$, la solution ne progresse pas adéquatement et a est alors donnée par :

$$a = \frac{0.075}{0.75 - r_{red}} + a_{min}$$

La valeur de a est forcée dans l'intervalle $[a_{min}, a_{max}]$.

Statut : implanté dans H2D2

Relaxation de Bank & Rose

Bank and Rose (1981) proposent un algorithme pour calculer a qui s'apparente à une recherche du minimum avec une valeur seuil.

Statut : implanté dans H2D2

Limiteurs

Les valeurs utilisées par les limiteurs ont un sens et une grandeur physique, alors que les paramètres des backtracking sont numériques.

Limiteur par valeur plafond

Pour chaque degré de liberté individuellement, l'incrément du_i n'est pas autorisé à dépasser une valeur limite :

$$du_i = \text{sign}(du, \min(|du_i|, du_{lim}))$$

L'action du limiteur est locale, le diagnostic étant posé pour chaque degré de liberté, par opposition au backtracking qui applique le facteur a à tout l'incrément du . Par conséquent, la direction de descente n'est pas conservée.

Statut : implanté dans H2D2

Limiteur par facteur d'échelle global

Pour chaque degré de liberté, un facteur d'échelle est d'abord calculé de manière à ce que les incréments du_i , pour ce degré de liberté, ne dépassent pas une valeur limite. Le facteur d'échelle global est alors le min de ces facteurs individuels :

$$a_i = \max(|du_i| / du_{lim})$$

$$a = \min(a_i)$$

Comme pour le backtracking, la direction de descente est conservée.

Statut : implanté dans H2D2

Modification de la matrice

Diverses méthodes ont été développées par les numériciens pour augmenter et améliorer la convergence, ou augmenter la robustesse des résolutions non-linéaires.

Calcul de la matrice tangente

Dans H2D2, la matrice tangente est calculée par approximation numérique (Dhatt *et al.*, 2005). L'approximation est à l'ordre 1, calculée par dérivation numérique du résidu avec la formule :

$$df/dx = (f(x+dx)-f(x)) / dx$$

$$Kt = - \partial R / \partial u = K + \partial K / \partial u \cdot u$$

Pour des calculs en double précision, dx est généralement donné par :

$$dx = \varepsilon x \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \max(10^{-7}, 0.1 * \text{sqrt}(\text{eps_mach}))$$

En double précision :

$$\text{eps_mach} \sim 2.2e-16$$

L'opération de dérivation n'est pas une opération numériquement stable, de faibles variations dans les données pouvant provoquer des modifications importantes de la dérivée. Loin de la solution, il peut être avantageux de moins bien calculer la dérivée en augmentant la valeur de ε . On peut associer la tangente ainsi calculée à une sécante.

Le taux de convergence n'est plus celui de la méthode de Newton. Il s'agit donc d'une méthode intermédiaire entre Picard et Newton.

Statut : implanté dans H2D2

De Picard à Newton

Le principe est de passer graduellement de la méthode de Picard, plus stable mais à taux de convergence limité, à la méthode de Newton par la relation :

$$K_m = a \cdot K + (1-a) \cdot Kt$$

Le coefficient de contrôle a est fonction d'une norme (résidu ou incrément), tel que :

$$\lim_{|i| \rightarrow \infty} a = 0$$

À convergence, on retrouve donc bien la méthode de Newton. a peut être calculé par simple interpolation linéaire :

$$a = a_{min}$$

$$R < R_{min}$$

$$\frac{a - a_{min}}{a_{max} - a_{min}} = \frac{R - R_{min}}{R_{max} - R_{min}} \quad R_{min} < R < R_{max}$$

$$a = a_{max} \quad R > R_{max}$$

avec :

$$a_{min} = 0$$

$$a_{max} = 1$$

Statut : non- implantée dans H2D2 (en date d'avril 2013)

Ajout d'un amortissement

La matrice Kt de la méthode de Newton est remplacée par (Felippa, 2001) :

$$Km = Kt + a.D$$

avec :

Km	matricide modifiée
Kt	matrice tangente
D	matrice diagonale
a	coefficient de contrôle

Le coefficient de contrôle est fonction d'une norme (résidu ou incrément), tel que :

$$\lim_{|.| \rightarrow \infty} a = 0$$

À convergence, on retrouve donc bien le problème initial et donc la solution du système original.

À nouveau, a peut être calculé par simple interpolation linéaire :

$$a = a_{min} \quad R < R_{min}$$

$$\frac{a - a_{min}}{a_{max} - a_{min}} = \frac{R - R_{min}}{R_{max} - R_{min}} \quad R_{min} < R < R_{max}$$

$$a = a_{max} \quad R > R_{max}$$

Différents choix sont possibles pour D . Parmi les plus simples, signalons :

- $D = I$: la matrice identité;
- $D = Ml$: la matrice masse diagonalisée par sommation des termes sur la diagonale;
- $D = Ktl$: la matrice Kt diagonalisée par sommation des valeurs absolues des termes sur la diagonale.

Dans le cas $D = Ml$, l'opérateur discret ajouté correspond exactement à un amortissement de facteur a . Avec les autres matrices, le lien n'est pas aussi direct.

Statut : implanté dans H2D2 avec $D = KtI$

Homotopie

Les algorithmes d'homotopie sont reliés aux algorithmes de continuation et de chargement incrémental (pas de chargement) (Watson *et al.*, 1997). Ils sont utilisés pour des systèmes rigides, des systèmes avec bifurcations ou points de rebroussement.

Le système original :

$$F(x) = 0$$

est modifié en :

$$\rho(\lambda, x) = \lambda F(x) + (1 - \lambda)(x - a)$$

ou :

λ	le niveau de chargement
a	est la solution à $\lambda=0$

Les algorithmes d'homotopie ont ceci de très intéressant que le niveau de chargement λ est intégré dans l'algorithme et permet de le contrôler. Il est alors possible de jouer sur λ , comme sur le pas de temps d'un algorithme temporel, pour contrôler la convergence et la précision.

Dans H2D2, deux chemins de chargement peuvent être définis :

1. Par les propriétés globales : pour chaque propriété globale, il est possible de décrire le chemin de chargement en fonction du paramètre λ
2. En utilisant le temps dans les fichiers de données et en associant λ à un pseudo temps.

Pour donner son plein potentiel, l'algorithme d'homotopie doit être associé à un contrôleur d'incrément et à un contrôleur de convergence.

Statut : implanté dans H2D2

Asymptote

L'atteinte d'une solution stationnaire peut être vue comme l'asymptote à $t \rightarrow \infty$ d'une résolution non-stationnaire. Toutes les méthodes d'intégration temporelle sont alors utilisables. Remarquons que pour un schéma d'Euler implicite, le système matriciel de la méthode de Newton :

$$Kt$$

est remplacé par

$$M \dot{x} + Kx$$

ce qui n'est pas sans rappeler la forme matricielle présentée à la section 0.

Statut : implanté dans H2D2

Méthodes d'intégration dans le temps

Le système semi-discret, issu de la discrétisation spatiale par éléments finis d'équations aux dérivées partielles non stationnaires, mène au système suivant :

$$M \frac{\partial u}{\partial t} + K \cdot u = f$$

avec :

M	la matrice masse
K	la matrice de rigidité
u	le vecteur des inconnues
f	le vecteur second membre

De nombreuses méthodes existent dans la littérature pour discrétiser le terme de dérivée temporelle. Elles peuvent être explicites, implicites, s'appuyer sur un pas de temps ou plusieurs, être à un pas ou à plusieurs pas.

Toutes les méthodes implantées dans H2D2 ne se basent que sur le pas de temps actuel.

Euler

La méthode d'Euler est peut être la plus simple et la plus connue. Il s'agit d'une discrétisation par un schéma aux différences finies :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{\Delta t}$$

En combinant un schéma explicite (*i.e.* toutes les valeurs prises à t) et un schéma implicite (*i.e.* toutes les valeurs prises à $t + \Delta t$), on obtient le schéma θ (θ scheme). Le système discret se laisse alors écrire :

$$M \frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{\Delta t} + (1 - \theta)[K(u^t) \cdot u^t] + (\theta)[K(u^{t+\Delta t}) \cdot u^{t+\Delta t}] = f$$

Statut : implanté dans H2D2

RK4

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes qui combinent les résultats à un certain nombre de pas intermédiaires, pour former une solution d'ordre supérieur. Parmi les versions explicites de ces méthodes, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est souvent utilisée. Elle compte quatre pas intermédiaires.

Statut : implanté dans H2D2

ESDIRK 1-2, 2-3 et 3-4

ESDIRK est l'acronyme de Explicit Singly Diagonally Implicit Runge-Kutta (Kristensen *et al.* 2004; Völcker *et al.* 2010). Ce sont des méthodes explicites à pas intermédiaires. Elles ont pour caractéristiques que la matrice reste la même pour tous les pas intermédiaires, une grande économie en temps de calcul. De plus, elles incorporent une évaluation de l'erreur.

Les méthodes d'ordre 1, 2 et 3 sont implantées. Elles ont été testées pour des applications de transport de sédiment. Une comparaison avec la méthode d'Euler implicite pour les équations de St-Venant reste à faire.

Statut : implanté dans H2D2

Contrôleur de pas de temps et de pas de chargement

Configurés avec un pas nominal, tous les contrôleurs calculent un facteur multiplicatif pour le prochain pas de temps (ou pas de chargement), en s'appuyant sur des informations de pas précédents et du pas actuel.

Contrôleur simple

Le contrôleur « simple » utilise uniquement l'état de convergence du pas actuel. Si l'algorithme n'est pas convergé, il coupe le pas en deux. À moins de nouvelle divergence, ce nouveau pas est maintenu pendant deux pas de temps, avant d'être augmenté d'un facteur 1.5 à tous les deux pas de temps, jusqu'à rejoindre le pas nominal.

Ce contrôleur s'est révélé efficace pour les cas où le pas nominal est bien adapté et où le rôle du contrôleur est de permettre de négocier des passages difficiles.

Statut : implanté dans H2D2

Contrôleur prédictif

Völcker *et al.* (2010) proposent un contrôleur basé sur les travaux de Gustafson *et al.* (1997) Ce contrôleur prédictif, est en fait un contrôleur proportionnel-intégral, basé sur une norme relative de l'incrément de solution. En fonction de celle-ci et d'une valeur cible, il va ajuster le nouveau pas. De manière classique, en cas de non convergence d'un pas, le pas est coupé en deux.

Le mode de fonctionnement du contrôleur est donc très différent du contrôleur simple. Il vise à maintenir une valeur cible de la norme. La relation entre la valeur cible de la norme et le pas de l'incrément n'est pas connu à priori et doit faire l'objet d'expériences numériques.

Le contrôleur prédictif a été utilisé avec succès pour des simulations d'advection-diffusion sur le long terme.

Statut : implanté dans H2D2

Contrôleur PID

Les contrôleurs PID (Söderlind 2002) ont trois modes de contrôle : le contrôle proportionnel, le contrôle intégral et le contrôle différentiel. Ils sont couramment utilisés pour toutes sortes de système de régulation. Comme le contrôleur prédictif, le contrôleur PID utilise une norme relative L2 et une valeur cible.

Ce contrôleur n'a pas encore fait l'objet de tests et de comparaisons avec les autres.

Statut : implanté dans H2D2

Critères d'arrêt

Le critère d'arrêt est ce qui ultimement décide si la simulation a atteint ses objectifs, si les critères de l'utilisateur/modélisateur sont remplis. Il est calculé à partir de l'incrément de solution. La norme peut être absolue ou relative, $\|\cdot\|_{l_2}$ ou $\|\cdot\|_{\infty}$, sur un degré de liberté ou sur tous les degrés de libertés.

Conclusion

Après avoir parallélisé et distribué le code H2D2 pour permettre de résoudre de gros systèmes, l'étape présente vise à diminuer les temps de calcul en travaillant sur les méthodes de résolution et en diminuant le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la convergence. Elle vise également à développer la robustesse des solveurs.

Le limiteur s'est de longue date révélé efficace et aide à contrôler la divergence, alors que le backtracking s'est révélé, dans beaucoup de cas, à piéger la solution dans un minima local dont il est difficile de s'extirper. Il ne devrait donc pas être utilisé avec une borne inférieure du facteur de correction trop petite.

Des tests effectués avec le calcul inexact de la matrice tangente montrent que cette méthode est efficace pour limiter des oscillations de la méthode de Newton. Des premiers résultats avec la méthode de Newton avec amortissement ont permis de couper par 4 le nombre d'itérations, ce qui se révèle très prometteur.

À cette étape, nous favorisons une méthode comme l'homotopie qui s'appuie sur une méthode robuste de résolution, comme la méthode de Newton avec amortissement, couplée à un contrôleur de convergence.

Les contrôleurs d'incrément se sont révélés des outils puissants tant pour l'homotopie que pour les algorithmes d'intégration dans le temps.

Bibliographie

- Bank, R.E. and Rose, D. (1981). Global approximate Newton methods, *Num. Math.*, 37: 279-295.
- Dhatt, G., Touzot, G. et Lefrançois, E. (2005). *Méthode des éléments finis*. Éditions Lavoisier, Paris. 601 p.
- Eisenstat, S. C., and Walker, H. F. (1994). Globally convergent inexact newton methods. *SIAM J. Optimization*, 4(2) : 393–422
- Felippa, C.A. (2001). *Nonlinear Finite Element Methods; Chapter 21 Newton-like methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Space Structures and Controls, University of Colorado at Boulder. Retrieved April 29th 2011, from <http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/NFEM.d/NFEM.Ch21.d/NFEM.Ch21.pdf>.
- Gustafsson, K. and Söderlind, G. (1997). Control strategies for the iterative solution of nonlinear equations in ode solvers. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18(1), 23–40.
- Kristensen, M. R., J. B. Jørgensen, P. G. Thomsen, S. B. Jørgensen (2004). An ESDIRK method with sensitivity analysis capabilities, *Computers and Chemical Engineering* 28 (2004) 2695–2707.
- Moré, J.J. and Thuente, D.J. (1994). Line search algorithm with guaranteed sufficient decrease. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 20(3) : 286-307.
- Secretan, Y. and Matte P. (2009) Parallélisation de l'assemblage et de la résolution matricielle directe de H2D2: Développement de critères de choix de configuration. Rapport de recherche R-1052, INRS-ETE, 37p.
- Secretan, Y. and Khedhaouiria D. (2010) Parallélisation et distribution de H2D2 : Speed up et choix de configuration. Rapport de recherche R-1146, INRS-ETE, 13p.
- Secretan, Y. and Matte P. (2010) H2D2 : Développement de stratégies de résolutions non-stationnaires et non-linéaires. Rapport de recherche R-1147, INRS-ETE, 31p.
- Söderlind, G. (2002). Automatic Control and Adaptive Time-Stepping. *Numerical Algorithms* 31(1-4): 281-310.
- Steffen, W.M. and Hill, M.C. (2001). MODFLOW-2000, the U.S. Geological Survey modular ground-water model – User guide to the link-amg (lmg) package for solving matrix equations using an algebraic multigrid solver. U.S. Geological Survey Open-file Report 01-177.
- Watson, L.T., Sosonkina, M., Melville, R.C., Morgan, A.P. and Walker H.F. (1997). Algorithm 777: HOMPACT90: a suite of Fortran 90 codes for globally convergent homotopy algorithms. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 23:514-549.
- Völcker C., J. B. Jørgensen, P. G. Thomsen, E. H. Stenby (2010). Adaptive Stepsize Control in Implicit Runge-Kutta Methods for Reservoir Simulation. Proceedings of the 9th International

Symposium on Dynamics and Control of Process Systems (DYCOPS 2010), Leuven, Belgium, July 5-7, 2010.